# 关于波的笔记

$X$

2021 年 8 月

## 1　波

波函数 $\phi(t,\vec{r})$ 满足波动方程

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi-\vec{\nabla}^2\phi=0\,. \tag{1}$$

这里 $c$ 为波速。$\phi$ 是时空的函数，我们也把 $\phi$ 叫做场。

### 1.1　平面波

我们考虑一个特例, 波函数只依赖于 $x$ 而不依赖于 $y$ 和 $z$,

$$\phi(t,\vec{r})=\phi(t,x)\,. \tag{2}$$

由此，我们知道波动方程可以写成

$$\partial_\eta\partial_{\bar{\eta}}\phi(\eta,\bar{\eta})=0\,. \tag{3}$$

这里我们定义了 $\eta=t-x/c$，以及 $\bar{\eta}=t+x/c$。从而我们得到通解

$$\boxed{\phi(\eta,\bar{\eta})=f(\eta)+g(\bar{\eta})}\,. \tag{4}$$

$f(t-x/c)$ 代表了沿着 '$+x$'-轴传播的波，而 $g(t+x/c)$ 是沿着 '$-x$'-轴传播的（见图 **??**）。考察 $t=0$ 时候，$f(0)$ 在 $x=0$ 取得；而当 $t=t^*$ 时，$f(0)$ 显然在 $x=ct^*>0$ 处取得。我们说 $f(0)$ 这个值从 0 点传播到了 $ct^*$ 点，所以说 $f(t-x/c)$ 描述了沿着 '$+x$'-轴传播的波。

以下我们只关注 $f(\eta)$。

我们可以对 $f$ 进行傅里叶分析，得到 [1]

$$\boxed{f(t-x/c)=\int\frac{d\omega}{2\pi}f_\omega\,e^{-i\omega t}\,e^{ikx}}\,, \tag{6}$$

此处，$f_\omega\equiv\int d\eta f(\eta)e^{i\omega\eta}$，$k\equiv\omega/c$。从而我们知道 $f(t-x/c)$ 描述了平面波，因为对于固定时刻 $t$，给定 $x$，波的相位 $iS=ikx$ 在 $y$-$z$ 平面上为常数（图 **??**），亦即波面为 $y$-$z$ 平面。另外 $f(t-x/c)$ 的振幅与 $x$ 无关。

## 1.2 球面波

我们考察另一种情况，波函数

$$\phi(t,\vec{r})=\phi(t,r)\,, \tag{7}$$

只是径向量模 $r=|\vec{r}|$ 的函数。这种波可以由球对称波源产生，如点光源。

如果我们令 $\phi(t,r)=\phi_r(t,r)/r$，容易验证

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi_r-\partial_r^2\phi_r=0 \tag{8}$$

比较之前平面波的情况，通过 $x\to r$，我们即得到 [2]，

$$\boxed{\phi(t,r)=\frac{1}{r}f(\eta)}\,, \tag{9}$$

以及

$$\boxed{\phi(t-x/c)=\frac{1}{r}\int\frac{d\omega}{2\pi}f_\omega\,e^{-i\omega t}\,e^{ikr}}\,. \tag{10}$$

显然，$\phi(t,r)$ 描述了球面波，因为相 $iS=ikr$ 在半径固定为 $r$ 的球面 $(\theta,\phi)$ 上为常数。其振幅随 $r^{-1}$ 衰减。

**在远离原点（$r=R\to\infty$）的很小的区域内（$\delta r\times\delta A\ll R\times\lambda R$），球面波可以近似为平面波。**

---

[1] 对于实波 $\phi\in\mathbf{R}$，一般左右行波会同时存在，因为

$$\phi=\int\frac{d\omega}{2\pi}f_\omega\,e^{-i\omega t}\,e^{ikx}+c.c.\,. \tag{5}$$

另外 $f_\omega=f_1+if_2$ 一般为复数，有 $f_1$，$f_2$ 两个自由度。所以 $f_\omega$ 无法通过逆傅里叶变化由 $\phi$ 唯一确定，因为 $\phi$ 作为实数，只有一个自由度。我们还需要另一个独立的量，比如 $\dot{\phi}$（类比动量与坐标相互独立）。因此 $f_\omega$ 和 $f_\omega^*$，$\phi$ 与 $\dot{\phi}$ 是正则变换下的坐标，与谐振子中的 $a$ 和 $a^\dagger$ 以及 $x$ 和 $p$ 的关系相同。与谐振子一样，在量子化后 $f_\omega$ 与 $f_\omega^*$ 扮演了升降算符的角色，是量子化场论的基础。

[2] 方便起见，我们省略了 $g(\bar{\eta})$ 的解。

不失一般性，我们把 $\vec{r}$ 当做 $x$-轴，并考察在 $y$-$z$ 平面上变化 $\delta l^2 = \delta y^2 + \delta z^2$ 所导致的相 $iS = ikr$ 的变化，为

$$i\delta S = ik\sqrt{x^2+\delta l^2} - ikx \approx i\,\pi\frac{\delta l^2}{\lambda R}\,. \tag{11}$$

这里我们用到了 $k \sim 2\pi/\lambda$，$\lambda$ 为波长。由此可见，在 $R$ 足够大，$\delta l$ 足够小的区域内，在垂直于 $x$-轴的 $y$-$z$ 平面上，$\delta S = 0$，$S =$ 常数。另外，

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+\delta r} = \frac{1}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta r}{R^2}\right)\,. \tag{12}$$

所以当 $R$ 足够大时，在很小的区域 $\delta A = \pi\,\delta l^2 \ll \lambda R$，$\delta r \ll R$ 内，我们有

$$\phi(r,t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{r}{c}\right)\,, \tag{13}$$

为平面波，且振幅与 $\delta r$ 无关，为常数。

## 1.3 短波

**我们考虑波长极短的情况 $\lambda \to 0$，我们会看到波的行为退化为粒子的行为。**

一般来说，波可以写成

$$\phi(t,\vec{r}) = a(t,\vec{r})e^{iS(t,\vec{r})}\,, \tag{14}$$

$a$ 为振幅，我们假设其比较平缓，随时空缓慢变化。相对来说，相 $S$ 通常是比较大的量。因为，当我们将 $r$ 改变一个波长 $\lambda \to 0$ 的时候，相 $S$ 改变了 $2\pi \gg 0$。

上面这个式子显然要满足波动方程，由此我们会得到

$$\frac{1}{S^2}\partial^\mu\partial_\mu a + \frac{2i}{S^2}\partial_\mu a\partial^\mu S + i\frac{a}{S^2}\partial^2 S - \frac{a}{S^2}(\partial_\mu S)^2 = 0\,. \tag{15}$$

在 $S$ 非常大的情况下，这里的 1，2，3 项分别随着 $S^{-2}, S^{-1}$，以及 $S^{-1}$ 趋于 0；而最后一项是 $\mathcal{O}(S^0)$ 的项。因此为了使得等式成立，我们得到

$$\boxed{\frac{1}{c^2}(\partial_t S)^2 - (\vec{\nabla}S)^2 = 0}\,. \tag{16}$$

这个方程与零质量的相对论性 Hamilton-Jacob 方程

$$\partial_t S + H(\vec{r},\vec{\nabla}S) = 0\,,\quad H^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4\,,\quad \vec{p} = \vec{\nabla}S\,, \tag{17}$$

是一样的，只不过把这里的作用量 $S$ 换成了波函数的相 $S$。

我们可以类比 Hamilton 方程和 Hamilton-Jacob 方程，得到

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} &\rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}} = \frac{-\partial \dot{S}}{\partial \vec{\nabla} S} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \vec{v}_g},\\ \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} &\rightarrow \boxed{\dot{\vec{k}} = -\vec{\nabla}\omega}.\end{aligned} \tag{18}$$

这里我们定义了 $\omega \equiv -\dot{S}$ 和 $\vec{k} \equiv \vec{\nabla} S$ [3]。$v_g$ 不是别的，正是波的群速度。

由此我们看到，在短波近似下 $\lambda \rightarrow 0$，非常神奇地，

- 波动方程退化成描述粒子的动力学哈密尔顿方程；**相位** $S(t,\vec{r})$ **扮演了作用量的角色**。 $\delta S = 0$ 决定了“粒子”的径迹；波的群速度 $v_g$ 对应了粒子的速度。

- 对于单色波 $\omega =$ 常数，$S = -\omega t + S_0(\vec{r})$。由于波面由 $S_0(\vec{r}) =$ 常数来决定，因此“粒子”动量 $\vec{k} = \vec{\nabla} S_0$ 或运动方向总是垂直于波面的 [4]。$\vec{k} = \vec{\nabla} S_0$ 决定了粒子的运动方向。

## 1.4 波的测不准原理

波与粒子一大区别就是动量 $\vec{k} = \vec{\nabla} S_0$ 与位置 $\vec{r}$ 不能同时测准。

考虑平面波从单缝通过，入射波的波面平行于缝隙（定义为 $x$-轴的方向）。

如果缝隙的开口 $D$ 很大，满足 $D \gg \lambda$。那么在这种情况下我们可以认为 $\lambda/D \rightarrow 0$，从而波退化为粒子行为，我们知道它的行径路线垂直于缝隙。因此沿着小孔方向的动量近似为 0。但这时候，波是从何点通过缝隙，则有

[3] 之所以这样定义，可以通过比较平面波看出。平面波波函数为

$$\phi \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}, \tag{19}$$

而对于一般的波，我们可以在将相 $S$ 在原点附近展开，从而

$$\phi \propto e^{iS(t,\vec{r})} = e^{i\vec{r}\cdot\nabla S(t,\vec{r}) + i\dot{S}(t,\vec{r})t + \ldots} \tag{20}$$

比较以上两式，我们看到

$$\omega = -\dot{S}, \qquad \vec{k} = \vec{\nabla} S. \tag{21}$$

[4] 考虑 $\delta S_0 = S_0(\vec{r} + \delta\vec{r}) - S_0(\vec{r}) = \vec{\nabla} S_0 \cdot \delta\vec{r}$。如果 $\vec{r} + \delta\vec{r}$ 和 $\vec{r}$ 都在波面上，那么 $\delta S_0 = 0$，从而 $\vec{\nabla} S_0 \perp \delta\vec{r}$。

$\Delta x = D$ 的不确定度。为了测准波的位置，我们就需要将缝隙收窄 $D \to 0$。但当 $D \to \lambda$ 时候，我们不能再忽略波长 $\lambda/D \sim \mathcal{O}(1)$，波的波动性显现，衍射行为明显，从而在沿着缝的方向弥散开来，此时 $\Delta k_x$ 则变得很大。

半定量地，单色平面波从单缝通过，在距离缝的垂直距离为 $L$ 的屏幕上，离中心 $x$ 处的强度为（见 Fraunhofer 衍射）

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \frac{kD}{2}\frac{x}{L}}{\frac{\pi D}{2} k \frac{x^2}{L^2}}\,, \tag{22}$$

由此可以估算出沿着 $x$-方向发生的弥散大小为（从强度中心到边缘）

$$\frac{kD}{2}\frac{x}{L} \sim \pi \longrightarrow x \sim \frac{2L\pi}{kD}\,, \tag{23}$$

因此动量允许的范围 $\Delta k_x$ 大约为

$$\Delta v_x = \frac{\omega}{k^2}\Delta k_x \sim \frac{x}{L/c} \sim \frac{2\pi}{kD/c}\,, \tag{24}$$

考虑到 $\Delta x = D$，我们得到

$$\boxed{\Delta v_x \Delta x \sim \frac{\lambda}{c}\,, \quad \Delta k_x \Delta x \sim 2\pi}\,. \tag{25}$$

当 $\lambda \to 0$ 时候，回到粒子的情形，位置和速度可以同时测准。

在量子力学中我们知道 $\frac{\vec{p}}{\hbar} = \vec{k}$，从而 $\Delta p_x \Delta x \sim h$，得到了海森堡测不准原理。

# 2 电磁波

## 2.1 远场

我们考虑由点电荷产生的电磁场。由于各向同行，这样的的电磁场是球对称的。

在远离源的地方，由 Maxwell 方程可以知道电磁势满足波动方程

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0\,, \tag{26}$$

这里方便起见，我们用了四矢符号 $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$，$x^\mu = (ct, \vec{x})$。并且我们用了 Lorenz 规范 $\partial \cdot A = \frac{1}{c^2}\dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$。

有前面关于球面波的一般讨论知道，$A^\mu$ 有通解形式

$$A^\mu(t,\vec{r}) = \frac{A_r^\mu(t-\frac{r}{c})}{r}\,. \tag{27}$$

我们还知道，离源足够源的时候 $A^\mu$ 可以近似为平面波，仅为 $t-\frac{r}{c}$ 的函数。因此我们能得到

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} = \frac{1}{c}(\vec{\nabla}r)\dot{\phi} - \dot{\vec{A}} = -c\frac{\vec{r}}{r}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \dot{\vec{A}} = -\dot{\vec{A}} + \hat{e}_r\cdot\dot{\vec{A}}\hat{e}_r\,,\\
\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}(r)\times\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c}\hat{e}_r\times\dot{\vec{A}} = \frac{1}{c}\hat{e}_r\times\vec{E}
\end{aligned} \tag{28}$$

这里 $\hat{e}_r = \vec{r}/r$ 是沿着 $\vec{r}$ 方向的单位矢量。**显然在 Lorenz 规范下，$\vec{E}$ 相当于移除掉了径向分量 $\hat{e}_r\cdot\dot{\vec{A}}\hat{e}_r$ 的 $\dot{\vec{A}}$。对于电磁场张量我们有 $\vec{E}\perp\vec{B}$，在平面波近似下，都是横场，这一点与规范选取无关**。

## 2.2 推迟势

对于一般情况我们有 Lorenz 规范下，电磁场满足

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = \mu_0\mathcal{J}^\mu(t,r)\,, \tag{29}$$

这里 $\mathcal{J}^\mu = (\rho c, \vec{J})$。

我们先简单地考虑放在原点的点电荷，$\mathcal{J}^\mu = e^\mu(t)\delta(\vec{r})$，的情况。这里 $e^\mu = (e(t)c, e(t)\vec{v}(t))$。一般情形可以通过叠加原理得到。

之前我们已经知道远离源 $\mathcal{J}^\mu$ 时候，场的通解由球面波解给出。而当靠近源时，$r\to 0$，从通解的形式我们发现 $\vec{\nabla}^2A^\mu \sim \mathcal{O}(r^{-3}) \gg \partial_t^2A^\mu \sim \mathcal{O}(r^{-1})$。因此当 $r\to 0$ 时，我们有

$$-\vec{\nabla}^2A^\mu = \mu_0\mathcal{J}^\mu\,, \tag{30}$$

这是我们熟悉的 Poisson 方程，它给出“静”电磁势

$$A^\mu(\vec{r}\to\vec{0}) = \frac{A_r^\mu(t)}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^\mu(t)}{r}\,, \tag{31}$$

由此我们确定了通解中的 $A_r^\mu$，从而对于位于原点的点粒子产生的电磁场为

$$A^\mu = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^\mu(t-\frac{r}{c})}{r}\,, \tag{32}$$

那么对于一般的处于 $\rho$ 和 $\vec{J}$，我们通过叠加原理得到所谓的推迟势

$$\boxed{A^\mu = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathcal{J}^\mu\left(t-\frac{R}{c}\,,\,\vec{r'}\right)}{R}d^3\vec{r'}}\,, \tag{33}$$

亦即在时间 t，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r'}$ 处的势由在之前 $t'=t-\frac{R}{c}$ 时刻，位于 $\vec{r'}$ 的流所决定。容易验证 $A^\mu$ 的确满足 Lorenz 规范 $\partial_\mu A^\mu=0$ [5]。

### 2.3 运动的点电荷

我们考虑沿轨迹 $\vec{r}=\vec{r}_0(t)$ 运动的点电荷产生的电磁场。为此我们有

$$\mathcal{J}^\mu=\left(ec\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))\,,\,e\dot{\vec{r}}_0(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))\right)=e^\mu\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))\,. \tag{37}$$

带入推迟势，我们得到

$$A^\mu=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}e^\mu(t')\delta(\vec{r'}-\vec{r}_0(t'))\big|_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}}d^3\,\vec{r'}\,, \tag{38}$$

我们不能直接用 $d^3\vec{r'}$ 来去掉 $\delta$ 函数，因为 $r_0(t')$ 也依赖于 $\vec{r'}$。为此我们要计算 $\vec{\partial'}_i\vec{f}_j(\vec{r'})$ 来得到去掉 $\delta$ 函数后的 Jacobian，这里 $\vec{f}(\vec{r'})=\vec{r'}-\vec{r}_0(t')$。我们显然有

$$\partial'_i\vec{f}_j=\delta_{ij}-\partial'_i\vec{r}_{0,j}(t')=\delta_{ij}-\dot{\vec{r}}_{0,j}(t')\partial'_i\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}\right)=\delta_{ij}-\frac{\hat{e}_{r,i}v_j(t')}{c}\,, \tag{39}$$

从而很容易算出 Jacobian $J=\left(1-\frac{\hat{e}_r\cdot v}{c}\right)^{-1}$。因此我们得到

$$\boxed{A^\mu=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^\mu(t')}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}} \tag{40}$$

即 Lienard-Wiechert 势 [6]。该结果

---

[5] 反复利用对于任意 $\vec{F}$，我们有

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{F}(\vec{r'},t-R/c)}{R}=-\partial_t\vec{F}\cdot\frac{\vec{\nabla}R}{c\,R}+\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\,, \tag{34}$$

以及

$$\vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{F}(\vec{r'},t-R/c)}{R}=\frac{\vec{\partial_{r'}}\cdot\vec{F}}{R}-\partial_t\vec{F}\cdot\frac{\vec{\nabla}'R}{cR}+\vec{F}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)\,, \tag{35}$$

这里我们需要留意的是，对于 $\vec{F}$，$\nabla'$ 会作用在 $\vec{r'}$ 上也会通过 $R$ 作用在 $t-R/c$ 上。再注意到 $\vec{\nabla}f(R)=-\vec{\nabla}'f(R)$，我们有

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{F}(\vec{r'},t-R/c)}{R}=\frac{\vec{\partial_{r'}}\cdot\vec{F}}{R}-\vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{F}(\vec{r'},t-R/c)}{R} \tag{36}$$

此外还用到流守恒 $\dot{\rho}+\vec{\partial_{r'}}\cdot\vec{J}=0$，以及 $\int d^3\vec{r'}\vec{\nabla}'\cdot\vec{f}=0$。

[6] 从相对论协变性角度出发，这个结果是必然的。我们知道势的分子正比于流（也就是速度），分母只能是距离的一次幂。问题仅仅涉及两个四矢量四速度 $u^\mu=\frac{dx^\mu}{ds}$ 以及四矢量 $R^\mu=(c(t-t'),\vec{r}-\vec{r'})$，且

- 对于匀速、非匀速运动都成立。
- $1-\vec{e}_r\cdot\vec{v}$ 仅仅是移除 $\delta$ 函数的效果。物理上来说，结果是由于，相对于静止电荷来说，移动的电荷扫过更大一块体积，所导致的。
- 等式右边都定义在 $t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}$ 时刻，亦即 $R(t')=c(t-t')$。

反复利用 $R(t')=c(t-t')$，因而 $\vec{\nabla}R(t')=-c\vec{\nabla}t'$，以及 $\partial_t R(t')=c-c\frac{\partial t'}{\partial t}$，$\partial_t\vec{v}=\dot{\vec{v}}\frac{\partial t'}{\partial t}$，$\vec{\nabla}\vec{v}=(\vec{\nabla}t')\,\dot{\vec{v}}$。并考虑到 $\vec{A}=\frac{\vec{v}\,\phi}{c^2}$，我们得到电磁场为

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\frac{e}{4\pi\epsilon_0(R-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c})^3}\left[\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\vec{R}\times\left(\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\times\frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\right)\right],\\ \vec{B}&=\frac{\vec{R}}{c\,R}\times\vec{E}=\frac{\mu_0}{4\pi(R-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c})^3}\left[\vec{R}\times\vec{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{R}\times\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\times\frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\right],\end{aligned}\tag{42}$$

这里的 $[\dots]$ 里的第一项对应着“静”电磁势，随着 $R^{-2}$ 衰减；后一项正比于加速度 $\dot{\vec{v}}$，随着 $R^{-1}$ 衰减，为电磁波，是横波，与我们之前关于远离源的电磁场的分析相吻合。当 $R$ 很大的时候，我们可以忽略“静”电磁势。

## 2.4 电磁辐射

我们考虑点电荷低速运动 $v\ll c$ 时候，在远处 $r\gg r'$，由电磁波带走的能量。这个由 Poynting 量来刻画

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\,,\tag{43}$$

表示了单位时间，流过单位面积的能流。由于我们只关心电磁波，因此我们有

$$\vec{S}=\epsilon_0 c\vec{E}^2\hat{e}_R\approx\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{1}{c^3}\dot{\vec{v}}^2\sin^2\theta\,\hat{e}_r\tag{44}$$

所以单位时间带走的能量为

$$\boxed{\frac{dE}{dt}=-\int\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}=-\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{c^3}\dot{\vec{v}}^2\frac{8}{3}\pi=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\ddot{\vec{r}}_0^{\,2}}{3c^3}}\,.\tag{45}$$

---

$R\cdot R=0$。那么我们能够构造的势只能有

$$A^\mu=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eu^\mu}{R_\mu u^\mu}\,,\tag{41}$$

考虑到 $c(t-t')=|r-r'|$，我们可以通过静电场的解固定系数 $\frac{\mu_0}{4\pi}$，重新得到 Lienard-Wiechert 势。

**上面这个式子是个影响极其深远的式子，导致了经典理论的崩塌，也帮助了 Heisenberg 建立了矩阵力学**。

### 2.4.1 经典原子模型的寿命

电磁辐射会导致经典的原子模型不稳定，因为绕着质子旋转的电子会辐射电磁波，从而带走能量。但是这种不稳定是否与实际情况（稳定的原子）相左，还是需要计算才能知道，因为原则上如果辐射能量太小，使得原子寿命远大于宇宙寿命的话，并不构成问题。

我们只考虑 $v/c \ll 1$ 的非相对论情况，**相对论修正只会进一步缩短原子的寿命**。在非相对论情况下，每一圈圆周轨道电子损失能量为 $\frac{dE}{dt}\frac{2\pi r}{v} \sim \frac{8\pi}{3}\frac{v^3}{c^3}E$，这里 $E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$。对于一般情况 $v \sim \mathcal{O}(0.01c)$，因此在每个瞬时，能量损失不影响把电子的轨道近似为圆周。

将能量 $E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ 以及 $a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 m}$ 带入公式 (45)，我们有

$$r^2 dr = -\frac{4}{3c^3}\frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\, m^2}dt \longrightarrow t_f - t_i = \frac{m^2c^3(4\pi\epsilon_0)^2}{4e^4}(r_i^3 - r_f^3)\,. \tag{46}$$

**假设原子半径为 $1\text{Å}$，得到非常短的寿命，约为 $1.05\times 10^{-10}s$！显然与实际情况不符**。

**另外，这里经典的电磁辐射会产生连续谱，而实际观测到的是分离的原子光谱。这些都暗示着在原子层面，经典理论不再适合，需要新的理论**。

### 2.4.2 Rayleigh 散射

考虑电磁波与电子散射。原子里的电子受到电磁波辐照后，会振动从而向外辐射电磁波。

简单起见，我们考虑入射电磁波为沿着 $z$-轴的平面波 $E = E_z e^{i\omega t}$。由此，电子的运动方程满足

$$m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z - eE_z e^{i\omega t}\,, \tag{47}$$

这里第一项是库仑力。因而电子遵循

$$\ddot{z} = \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{e}{m}E_z\cos(\omega t) \tag{48}$$

从公式 (45)，我们立即可以得到

$$\langle E\rangle = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3c^3}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\frac{e^2E_z^2}{2m^2} = \frac{8\pi r_0^2}{3}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\langle S\rangle_{\text{in}} \tag{49}$$

这里 $r_0=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}=\alpha^2 a_0$ 为经典电子半径，$a_0=\frac{\hbar}{m_c\alpha c}$ 为 Bohr 半径。而 $\langle S\rangle_{in}=\frac{\epsilon_0 cE_z^2}{2}$ 为单位时间入射能流密度。

由此我们可以算出散射截面 $\sigma$

$$\sigma=\frac{\text{单位时间散射总能量}}{\text{单位时间单位面积辐射能量}}=\frac{8\pi r_0^2}{3}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\,. \tag{50}$$

记得这里的 $\omega_0=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr^3}\sim\frac{\alpha c}{a_0}$。这里 $a_0$ 为 Bohr 半径，$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\approx\frac{1}{137}$ 为精细结构常数。所以 $\omega_0$ 随着原子体系的增大而减小。

- 当 $\omega\gg\omega_0$ 时，$\sigma=\frac{8\pi r_0^2}{3}$ 与入射光的频率无关。因为 $\omega$ 很大，$\lambda$ 很短，光呈现粒子性质，与近似自由的电子发生碰撞散射，这其实就是 Compton 散射。

- 当 $\omega\ll\omega_0$ 时，$\sigma=\frac{8\pi r_0^2}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\sim\frac{8\pi a_0^6}{3}\frac{(2\pi)^4}{\lambda^4}$ 随着 $\lambda^{-4}$ 减小而增长。所以短波得到更多的散射。这是 Rayleigh 散射。

  **Rayleigh 散射适用的条件也可以写成 $\omega\ll\frac{\alpha c}{a_0}=\frac{m\alpha^2c^2}{\hbar}\sim\frac{\Delta E}{\hbar}$。也就是说入射电磁波不能激发原子、解析原子，而视原子为一个整体（刚体）进行散射** [7]。

### 2.4.3 黑体辐射

黑体辐射最容易用热平衡时，黑体墙内电磁波形成驻波而得到。而这里我们考察电磁波辐射平衡的图像，它可能更加物理。

其大致的图像是，气体中的带电粒子 $A$ 以某固有频率 $\omega_0$ 振动时，辐射电磁波，损失能量 $E_{\text{loss}}$；但由于气体密闭在黑体腔内，这些电磁波被约束在黑体腔内，并与气体的带电粒子发生散射，带电粒子 $A$ 吸收其它粒子散

[7] 由刚体图像，很容易从有效理论的角度得到 $\frac{1}{\lambda^4}$ 的散射行为。电磁波由电磁场张量场 $F_{\mu\nu}$ 来描述，原子作为整体，由为相对论场 $\phi$ 来描述（二次量子化波函数）。由于原子数守恒所以 $\phi^\dagger\phi$ 总是成对出现。另外由于原子的电中性，$\phi$ 是规范不变的。所以可以构造的电磁场与原子的相互作用有类似

$$\mathcal{L}_{int}=\frac{\xi}{\Lambda^3}\phi^\dagger\phi F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\dots \tag{51}$$

的形式。**所有与 $\omega$ 同量级的动力学信息都包含在算符内，而不出现在系数 $\frac{c}{\Lambda^3}$ 中**。。在自然单位制下 $\hbar=c=1$，拉矢量密度 $\mathcal{L}$ 的量纲总是能量的 4 次幂，$\phi$ 的量纲为能量的 $\frac{3}{2}$ 次方，$F$ 的量纲为能量的 2 次方，我们总可以选择 $\xi$ 为无量纲系数，因此 $\Lambda$ 为能量量纲，且其值远大于 $\omega$。所以很自然地，我们可以将 $\Lambda$ 设为 $\frac{1}{a_0}$。由此我们有散射截面为

$$\sigma\sim|\langle A\gamma|\mathcal{L}_{int}|A\gamma\rangle|^2\sim\xi^2a_0^6\times f(\omega) \tag{52}$$

留意到散射截面 $\sigma$ 的量纲为能量 $-2$ 次幂，因此 $f(\omega)\sim\omega^4\sim\lambda^{-4}$ 才能让等式左右两边量纲相同。从而得到 $\lambda^{-4}$ 律。

射的电磁波，重新获得能量 $E_{\rm gain}$，达到平衡。此时，我们需要在一个振动周期里，平均能量满足 $\langle E\rangle_{\rm loss}=\langle E\rangle_{\rm gain}$。

由于辐射（降低频率）和散射（吸收散射，增高频率）的电磁波都是因为粒子振动导致的，在平衡状态，其频率应该集中在 $\omega_0$ 附近很小的区域内 $|\omega-\omega_0|\ll\omega_0$，因此辐射能量的分布可以近似为 $dE=I(\omega_0)d\omega$。在平衡时，气体中原子的平均能量为 $3kT$。

对于简谐振动我们有 $\vec{x}=\vec{x}_0e^{i\omega_0t}$, 由此我们可以计算加速度与辐射带走的能量为

$$\langle E\rangle_{\rm loss}=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2x_0^2\omega_0^4}{3c^3}\langle\cos^2(\omega_0t)\rangle=-r_0\frac{2\omega_0^2}{3c}E=-r_0\frac{2\omega_0^2}{3c}3kT\,. \tag{53}$$

最后等式在热平衡时成立。另外由以上式子，我们可以得到损失能量的运动方成立的阻尼 $\gamma=\frac{2\omega_0^2}{3c}r_0$。**留意到** $\frac{\gamma}{\omega_0}\sim\frac{2}{3}\alpha^3\sim10^{-7}$。**那么在一个周期内，频率的改变极小**，从而佐证了我们之前说的图像的可靠性。

受电磁波辐射的带电粒子的运动我们在前面一节考察过，这里多了阻尼项，则变成

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-m\gamma\dot{x}-eE_0e^{i\omega t}\,, \tag{54}$$

按前面的分析，达到平衡时，入射波的能量为 $I(\omega_0)d\omega$。由此很容易获得入射频率在 $\omega_0$ 附近的电磁波，发生散射后贡献的能量为 $E=\sigma I(\omega_0)d\omega$。另外考虑到 $|\omega-\omega_0|\ll\omega_0$，我们能得到 [8]

$$\langle E\rangle_{\rm gain}=\frac{2\pi r_0^2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}I(\omega_0)d\omega\,, \tag{55}$$

注意这里的积分原本应该被限制在 $\omega_0$ 附近。但由于被积函数在很窄的 $\omega_0\pm\gamma/2$ 区间之外陡降到 0，因此我们可以把积分放宽到 $(-\infty,+\infty)$ [9]。由此，我们能解出热平衡时的 $I$ 为

$$I(\omega)=\frac{\omega^2}{\pi^2c^2}kT\,. \tag{57}$$

[8] 这里的散射截面 $\sigma$ 与公式 (50) 没有本质区别，无非加了阻尼 $\gamma$ 以及将 $\omega=\omega_0+(\omega-\omega_0)$ 在 $\omega_0$ 附近做了展开。

[9] 留意到

$$\lim_{\gamma\to0}\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}=\delta(\omega-\omega_0) \tag{56}$$

. 也就能明白为什么放宽积分区域，以及 $I(\omega)\to I(\omega_0)$ 是合适的。

这就是 Rayleigh–Jeans 谱。我们今天知道它在紫外端是错误的。经典理论无法正确描述黑体辐射的全部能谱。

**将量子化的电磁场与量子力学耦合在一起，然后用微扰论对上述子章节各问题重新分析应该是有意思的训练。其计算与 Lamb 移位相当，用到第二阶微扰。但印象里没有高等量子力学的教科书有这方面的计算。提供这些计算看来也是有必要的，因为可以直接证实量子理论的确可以解决经典遗留的问题，或者同样能得到正确的结果。**